Una introspección al calculo de la raíz n-ésima de un número en el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$

Savinelli Roberto Nicolás
<rsavinelli@frba.utn.edu.ar>

26 de febrero de 2021

1. Desarrollo de la expresión genérica

Sea t un número natural mayor a 0, entonces, podemos obtener una secuencias única de números primos $p_1 \leq \ p_2 \leq \ ... \leq \ p_k$ tales que nos permitan reescribir a t como una multiplicación de los mismos. Esto es:

$$t = p_1 \times p_2 \ \times ... \times p_k$$

A este teorema se lo conoce como **El teorema fundamental de la Aritmética** y a la secuencia $t = p_1 \ p_2 \ ... \ p_k$ se la conoce como la **factorización en números primos** de t.

Tomando como base a este teorema establecemos que la raíz n-ésima de todo número natural puede ser expresada como la múltiplicación de un número entero por un número irracional, provisto que algúno de los números primos de la factorización se encuentre presente al menos n veces en la misma. Esto es:

$$\sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{p_1 \times p_2 \times ... \times p_k} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Donde, para cada factor primo, se los puede agrupar al repetirse según el exponente sea mayor, menor o igual a n: en el caso de que el exponente sea menor, se deja la expresión como está; si el exponente es igual, se simplifica, el mismo, con la raíz; dado el caso de que el exponente sea mayor, deberemos escribirlo como n por una constante más un resto menor a n.

Para ejemplificar el caso de un exponente mayor, tomemos $s \in \mathbb{N} : s > n$. Siendo $s > n$, podemos entonces expresarla como:

$$s = wn + u \qquad w, u \in \mathbb{N}_0 : u < n$$

Lo que nos permite que, dado un número primo p al cual le queremos calcular la raíz n-ésima, obtenemos:

$$\sqrt[n]{p^s} = \sqrt[n]{p^{wn+u}}$$

$$\sqrt[n]{p^s} = \sqrt[n]{p^{wn} \times p^u}$$

$$\sqrt[n]{p^s} = \sqrt[n]{p^{wn}} \times \sqrt[n]{p^u}$$

$$\sqrt[n]{p^s} = p^w \times \sqrt[n]{p^u}$$

Nótese que el resto u será cero si el exponente s fuera divisible por n.

Extendiendo la demostración a todos los casos presentados:

$$\sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{p_a^n \times p_b^{w \times n + u} \times p_c^v \times ... \times p_k} \qquad u, v, w \in \mathbb{N}_0 : u, v < n$$

Permitiendo simplificar la expresión anterior de manera que:

$$\sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{p_a^n} \times \sqrt[n]{p_b^{w \times n + u}} \times \sqrt[n]{p_c^v \times ... \times p_k}$$

$$\sqrt[n]{t} = p_a \times \sqrt[n]{p_b^{w \times n}} \times \sqrt[n]{p_b^u} \times \sqrt[n]{p_c^v \times ... \times p_k}$$

$$\sqrt[n]{t} = p_a \times p_b^w \times \sqrt[n]{p_b^u} \times \sqrt[n]{p_c^v \times ... \times p_k}$$

$$\sqrt[n]{t} = p_a \times p_b^w \times \sqrt[n]{p_b^u \times p_c^v \times ... \times p_k}$$

Notese que la cantidad de términos dentro y fuera de la raíz n-ésima van a depender de la cantidad de factores primos diferentes y las veces que se encuentren repetidos.

2. Ejemplo

Para ejemplificar un caso de uso tomemos al número 270. Calculando sus factores primos utilizando el método del factor común obtenemos que $270 = 2 \times 3^3 \times 5$:

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1/	

Cuadro 1: Factorización en números primos de 270

Ahora bien, ¿Cómo calculamos $\sqrt{270}$?

Reescribiendo $\sqrt{270}$ como su expresión factorizada obtenemos:

$$\sqrt{2 \times 3^3 \times 5}$$

Donde si seguimos trabajando la expresión obtenemos:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3^3} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3^{1 \times 2 + 1}} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^1} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

$$3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

$$3 \times \sqrt{3 \times 2 \times 5}$$

$$3 \times \sqrt{30}$$

Siendo el resultado de $\sqrt{270} = 3 \times \sqrt{30}$.

Finalmente, $\sqrt{30}$ no puede representarse, a su vez, como la múltiplicación de un número entero por un número irracional por ser sus factores primos 2, 3 y 5.

Acerca de este documento

La información contenida en este documento fue desarrollada persiguiendo fines académicos para el curso K1002 de Discrete Mathemathics de UTN FRBA (Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires) como se dictó en su formato anual en 2020 por Lic. Alejandra Isola.

Para más información sobre el autor visite: https://savinelli.com.ar/

Fuentes de información y/o bibliografía consultada:

Aspnes James, 2020, Notes on Discrete Mathematics for the Fall 2017 semester version of the Yale course CPSC 202a, Mathematical Tools for Computer Science.
http://www.cs.yale.edu/homes/aspnes/classes/202/notes.pdf.